

Aide Mémoire de Calcul Différentiel

1 Rappels sur les espaces normés

boule ouverte de centre a et de rayon r	$\stackrel{def}{\iff}$	$B(a, r) = \{x \in E \mid \ x - a\ < r\}$
boule fermé de centre a et de rayon r	$\stackrel{def}{\iff}$	$B(a, r) = \{x \in E \mid \ x - a\ \leq r\}$
Ω ouvert	$\stackrel{def}{\iff}$	$\forall x \in \Omega, \exists r > 0 \mid B(x, r) \subset \Omega$
A fermé	$\stackrel{def}{\iff}$	$E \setminus A$ ouvert
	$\iff$	$\forall x_n \in A \longrightarrow x$ alors $x \in A$
$\mathcal{V}(a) : V$ voisinage de a	$\stackrel{def}{\iff}$	$\exists r > 0, B(a, r) \subset V$
A borné	$\stackrel{def}{\iff}$	$\exists x \in E, \exists r > 0 \mid A \subset B(x, r)$
suite convergente	$\stackrel{def}{\iff}$	$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \Rightarrow \ x_n - x\ < \varepsilon$
suite de Cauchy	$\stackrel{def}{\iff}$	$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n, m \geq n_0 \Rightarrow \ x_n - x_m\ < \varepsilon$
suite convergente	$\implies$	suite de Cauchy
espace de Banach (complet)	$\stackrel{def}{\iff}$	suite de Cauchy = suite convergente
$\ \cdot\ $ et $\ \cdot\ '$ équivalentes	$\stackrel{def}{\iff}$	$\exists a > 0, b > 0 \mid \forall x \in E, a\ x\ \leq \ x\ ' \leq b\ x\ $
$f : E \rightarrow F$ continue en a	$\stackrel{def}{\iff}$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ x - a\ _E \leq \delta \Rightarrow \ f(x) - f(a)\ _F \leq \varepsilon$
	$\iff$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B(a, \delta), f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$
f continue	$\iff$	B fermé alors $f^{-1}(B)$ fermé
	$\iff$	B ouvert alors $f^{-1}(B)$ ouvert
	$\iff$	$\forall x_n \longrightarrow x$ alors $f(x_n) \longrightarrow f(x)$
compact	$\stackrel{def}{\iff}$	sous-recouvrement fini d'ouverts
	$\iff$	$\forall$ suite, $\exists$ sous-suite convergente
	$\implies$	fermé + borné
	$\implies$	de Banach (complet)
F fermé $\subset K$ compact	$\implies$	F compact
K compact et f continue	$\implies$	$f(K)$ compact et f bornée et atteint ses bornes

dimensions infinies (cas général)	dimensions finies
exemples : $C^0([0; 1], \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^\infty, P[X]$	exemples : $\mathbb{R}^n, \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$
espace de Banach (complet) si suite de Cauchy = suite convergente	normes équivalentes suite de Cauchy = suite convergente
compact = sous-recouvrement fini d'ouverts compact $\iff$ sous-suite convergente compact $\implies$ fermé + borné	compact $\iff$ fermé + borné
linéaire + continue $\iff$ linéaire + bornée sur $\overline{B}(0; 1)$	linéaire $\implies$ continue

Théorème du point fixe

$$\left\{ \begin{array}{l} f : E \rightarrow E \text{ avec } E, \text{ espace de Banach} \\ \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \quad (0 < \alpha < 1) \end{array} \right. \implies f(a) = a \text{ unique}$$

Applications linéaires continues : $\mathcal{L}(E, F)$

$$\|f\| = \|f\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$$

$$\begin{aligned} \text{si } f \text{ linéaire : } f \text{ continue sur } E &\iff f \text{ continue en un point} \\ &\iff f \text{ est bornée sur } \overline{B}(0; 1) \\ &\iff \exists M \geq 0 \text{ tel que } \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E \text{ (avec } M = \|f\|) \end{aligned}$$

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \implies \|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E$$

2 Synthèse sur les applications différentiables

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \text{linéaire, continue en } h & + \text{négligeable en } h \\ &\text{différentielle : } f'(a) \in \mathcal{L}(E, F) \\ f(a+h) - f(a) &= [f'(a)](h) \text{ ou } f'(a)h & + o(h) \end{aligned}$$

$$(\text{calcul différentiel}) = (\text{algèbre linéaire}) + (\text{majorations de normes})$$

$$x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a) : \text{équation de la tangente à } f \text{ en } a = \text{approximation affine}$$

Rappels

$$\begin{aligned} f = o_a(g) &\iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 & f = O_a(g) &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ borné} \\ f(h) = o(h) &\iff \frac{\|f(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda x \\
g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) &\iff \exists M_g \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, g(x) = M_g x \\
\Rightarrow f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) &\equiv f'(a) \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

2.1 Propriétés

- f différentiable $\implies f$ continue
- $f \in \mathcal{L}(E, F) \implies f'(a) = f$
- f constante $\implies f'(a) = 0$
- $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$
- $l(x) = B(f(x), g(x)) \implies l'(a)h = B(f'(a)h, g(a)) + B(f(a), g'(a)h)$
ex : $l(x) = f(x) \times g(x) = B(f(x), g(x))$ avec $B(x, y) = x \times y$
 $\Rightarrow l'(a)h = f'(a)h \times g(a) + f(a) \times g'(a)h$

2.2 Théorème d'accroissements finis

$$\begin{aligned}
f \text{ différentiable sur } [a, b] &\Rightarrow \|f(b) - f(a)\|_F \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\| \right) \|b - a\|_E \\
f \text{ différentiable sur un connexe} &\Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \left(\sup_{a \in \text{connexe}} \|f'(a)\| \right) \|x - y\|_E
\end{aligned}$$

$$\|f'(a)\| = \|f'(a)\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f'(a)(x)\|_F$$

2.3 Cas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
f \text{ différentiable} &\Rightarrow \delta_i f \text{ existent} : \delta_i f(a) = f'(a)e_i \\
f \text{ différentiable} &\not\Leftarrow \delta_i f \text{ existent} \\
f \text{ différentiable} &\Leftarrow \delta_i f \text{ existent et sont continues}
\end{aligned}$$

$$f'(a)h = \sum \delta_i f(a)h_i$$

2.4 Continûment différentiable

$$f \in C^1 = \left\{ \begin{array}{l} f \text{ différentiable} \\ f' \text{ continue} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \delta_i f \text{ existent et sont continues (cas } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$$



$$\begin{array}{ccc}
f'(x) : E & \rightarrow & F \\
h & \mapsto & f'(x)h \neq f' : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\
& & x \mapsto f'(x)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
f \text{ différentiable sur } U &\Rightarrow f'(a) \text{ continue (et linéaire)} \quad \forall a \in E \\
&\neq f' \text{ continue}
\end{aligned}$$

2.5 Matrice Jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en x

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \dots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(x)^T \end{pmatrix} = (J_1 f(x) \dots J_m f(x))$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) &\equiv \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \\ x \in \mathbb{R}^n \quad f'(x) &\equiv Jf(x) \\ x, y \in \mathbb{R}^n, \quad f'(x)y &= Jf(x)y \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

2.6 Gradient de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en x

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= Jf(x)^T = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \\ f'(x)h &= \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) & \dots & \partial_n f(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \langle \nabla f(x), h \rangle \\ f(a+h) - f(a) &= \langle \nabla f(x), h \rangle + o(h) \end{aligned}$$

Rappels

Injectif, Surjectif, Bijectif

$$\begin{aligned} f \text{ injectif} &\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \\ \text{si } f \text{ linéaire : } f \text{ injectif} &\Leftrightarrow (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0) \Leftrightarrow \ker f = \{0\} \\ f \text{ surjectif} &\Leftrightarrow \forall y, \exists x \mid f(x) = y \\ \forall f : E \rightarrow F &\Rightarrow f : E \rightarrow f(E) \text{ surjectif} \\ f \text{ bijectif} &\Leftrightarrow f \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow f \text{ injectif et surjectif} \\ &\Leftrightarrow \forall y, \exists! x \mid f(x) = y \\ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \text{ inversible et d'inverse continue} &\Leftrightarrow \det Jf(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Inversion de matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com} A^T$$

avec $\text{com} A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A \text{ privée de la } i\text{-ème ligne et de la } j\text{-ième colonne})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - bd} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3 Différentielles secondes, formules de Taylor

3.1 $f''(a)$ différentielle seconde de f en a

$$f'(a+h) = f'(a) + f''(a)h + o(h) \quad \text{dans } \mathcal{L}(E, F)$$

$f''(a) = (f')'(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \equiv \mathcal{L}(E \times E, F) = \text{application bilinéaire continue}$

3.2 Théorème de Schwarz

$$f \text{ de classe } C^2 \Rightarrow f''(a) \text{ est symétrique}$$

3.3 Cas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f''(x)(h, k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) k_i h_j$$

Matrice hessienne de f (carrée et symétrique)

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

3.4 Formule de Taylor

$$f : E \rightarrow F \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)(h, h) + o(h^2)$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(a)h, h \rangle + o(h^2)$$

3.5 Ensemble convexe / Fonction convexe

$$C \subset \mathbb{R}^n \text{ convexe} \iff \forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1], \alpha x + (1-\alpha)y \in C$$

$$f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ convexe} \iff \forall \alpha \in [0, 1], f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

3.6 Propriétés

$$f \text{ convexe} \implies \lambda f \text{ convexe } (\lambda > 0)$$

$$f \text{ et } g \text{ convexes} \implies (f+g) \text{ et } \max(f, g) \text{ convexes}$$

3.7 $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ matrice symétrique

$M \text{ est définie positive}$ $\iff \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^T M x > 0$ $\iff \text{toutes valeurs propres} > 0$ $\stackrel{n=2}{\iff} \begin{cases} \det(M) > 0 \\ \text{tra}(M) > 0 \end{cases}$	$M \text{ est semi-définie positive}$ $\iff \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T M x \geq 0$ $\iff \text{toutes valeurs propres} \geq 0$ $\stackrel{n=2}{\iff} \begin{cases} \det(M) \geq 0 \\ \text{tra}(M) \geq 0 \end{cases}$
---	--

3.8 Propriétés

$$\begin{aligned}
 f \text{ convexe sur } C &\iff \forall x, y \in C, \quad f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \\
 f \text{ convexe sur } C &\iff \forall x \in C, \quad \nabla^2 f(x) \text{ semi-définie positive} \\
 f \text{ strictement convexe sur } C &\iff \forall x \in C, \quad \nabla^2 f(x) \text{ définie positive}
 \end{aligned}$$

4 Inversion locale, fonctions implicites

4.1 Difféomorphisme de classe C^1 ou C^1 -difféomorphisme

$$\begin{aligned}
 &f : V \rightarrow F \text{ est un difféomorphisme de classe } C^1 \text{ de } V \text{ (sur } W = f(V)) \\
 \iff &\begin{cases} f : V \rightarrow W \text{ est bijective de classe } C^1 \text{ sur } V \\ f^{-1} : W \rightarrow V \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } W \end{cases}
 \end{aligned}$$

4.2 Théorème d'inversion locale

$$\begin{aligned}
 \text{Si } &\begin{cases} f : U \rightarrow F \text{ de classe } C^1 \\ f'(a) \text{ inversible et d'inverse continu } (\equiv \det Jf(a) \neq 0 : \text{cas } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m) \end{cases} \\
 \text{Alors } &\begin{cases} \exists V = \mathcal{V}(a) \text{ ouvert, } (\exists W = \mathcal{V}(f(a)) = f(V) \text{ ouvert}) \\ f : V \rightarrow F \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme de } V \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xRightarrow{\text{de plus}} & \begin{aligned} [f^{-1}]'(f(x)) &= f'(x)^{-1} \\ J(f^{-1})(f(x)) &= (Jf(x))^{-1} \quad \text{cas } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}
 \end{aligned}$$

4.3 Théorème des fonctions implicites

$$\begin{aligned}
 &f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \quad (\text{valable aussi sur des espaces de Banach}) \\
 &(x, y) \mapsto f(x, y) \\
 \text{Si } &\begin{cases} f \text{ est de classe } C^1 \\ f(a, b) = 0 \\ \det J_y f(a, b) \neq 0 \quad (J_y f(a, b) \in \mathbb{M}_{p \times p}(\mathbb{R}) \text{ et } Jf(x, y) \in \mathbb{M}_{(n+p) \times p}(\mathbb{R})) \end{cases} \\
 \text{alors } &\begin{cases} \exists V_a = \mathcal{V}(a) \text{ ouvert, } \exists V_b = \mathcal{V}(b) \text{ ouvert, avec } V_a \times V_b \subset U \\ \exists \text{ une application } \varphi : V_a \rightarrow V_b \text{ de classe } C^1 \text{ tels que} \\ \begin{cases} (x, y) \in V_a \times V_b \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in V_a \\ y = \varphi(x) \end{cases} \end{cases} \\
 \xRightarrow{\text{de plus}} & J\varphi(x) = -[J_y f(x, \varphi(x))]^{-1} J_x f(x, \varphi(x)) \quad (\in \mathbb{M}_{n \times p}(\mathbb{R}))
 \end{aligned}$$

4.4 Vecteur tangent en a à $C \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 &v \in \mathbb{R}^n \text{ vecteur tangent en } a \text{ à } C \\
 \iff &\exists \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ dérivable (où } I \text{ est un intervalle ouvert contenant } 0) \text{ telle que}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \gamma(I) \subset C \\ \gamma(0) = a \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
v \text{ vecteur tangent de } \ker h \text{ en } a &\implies v \in \ker Jh(a) \\
v \text{ vecteur tangent de } \ker h \text{ en } a &\iff \begin{cases} v \in \ker Jh(a) \\ \forall i, \nabla h_i(a) \text{ linéairement indépendants} \\ \text{(c-à-d } \ker Jh(a)^T = \{0_{\mathbb{R}^m}\}) \end{cases}
\end{aligned}$$